Método de Rankin

El método de Rankin fue desarrollado independientemente por Rankin en 1939 y por Selberg en 1940. En este contexto, lo utilizaremos para expresar la convolución de L- series de dos formas modulares como un producto de Petersson que involucra series de Einsenstein. Estas notas se basan en el capítulo IV del artículo de Gross y Zagier *Heegner points and derivatives of L-series* y en el artículo de Gross *Heights and the special values of L-series.*

1. Series Theta asociadas a cuerpos cuadráticos imaginarios

Sea K un cuerpo cuadrático imaginario de discriminante $-D$ y sea $\mathcal{O}_K$ su anillo de enteros. Sea $u(-D)$ el cardinal de $\mathcal{O}_K^\times/\langle\pm 1\rangle$. Ocurre que $u(-3)=2$, $u(-4)=2$ y en el restos de los casos $u(-D)=1$. Sea $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ el grupo de clases de ideales de $\mathcal{O}_K$ y $h(-D)$ su cardinal. Si $\mathcal{B}$ es una clase de ideales de $\mathcal{O}_K$ definimos su serie theta:

Definición (Serie theta asociada a $\mathcal{B}$)**.** Sea $\mathfrak{b}$ un ideal fijo en la clase $\mathcal{B}$ y $\mathcal{N}$ la función norma, definimos la serie theta asociada a $\mathcal{B}$ de la siguiente manera:

$$E_{\mathcal{B}}(z)=\frac{1}{2u}\sum_{\lambda\in\mathfrak{b}}q^{\mathcal{N}\lambda/\mathcal{N}\mathfrak{b}}=\sum_{m=0}^{\infty}r_{\mathcal{B}}(m)q^m \qquad (q=e^{2\pi i z})$$

Teorema (Hecke)**.** $E_{\mathcal{B}}$ es una forma modular de peso 1 para $\Gamma_0(D)$, con carácter ϵ, donde ϵ es el carácter de Dirichlet asociado a K, es decir, definido en $(\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^\times$ tal que

$$\epsilon(p)=\left(\frac{-D}{p}\right)$$

Proposición. *Para $m\geq 1$, ocurre que $r_{\mathcal{B}}(m)$ coincide con la cantidad de ideales de norma m en la clase $\mathcal{B}$.*

Demostración. De la definición de $r_{\mathcal{B}}(m)$ sabemos que $2ur_{\mathcal{B}}(m)$ es la cantidad de $\lambda\in\mathfrak{b}$ tal que $\mathcal{N}(\lambda)=m\mathcal{N}\mathfrak{b}$. Entonces, para cada $\lambda\in\mathfrak{b}$ tal que $\mathcal{N}(\lambda)=m\mathcal{N}\mathfrak{b}$, el ideal $(\lambda)\mathfrak{b}^{-1}$ es un ideal de $\mathcal{O}_K$ en la clase $\mathcal{B}^{-1}$ y $\mathcal{N}((\lambda)\mathfrak{b}^{-1})=m$.

Recíprocamente, si $\mathfrak{a}\subseteq\mathcal{O}_K$ es un ideal en la clase $\mathcal{B}^{-1}$ con $\mathcal{N}(\mathfrak{a})=m$, entonces $\mathfrak{ab}$ es un ideal principal, es decir $\mathfrak{ab}=(\lambda)$ donde $\lambda\in\mathfrak{b}$. Además $\mathcal{N}(\lambda)=\mathcal{N}(\mathfrak{a})\mathcal{N}(\mathfrak{b})=m\mathcal{N}(\mathfrak{b})$.

Esto da la siguiente biyección:

$$\{\lambda\in\mathfrak{b}:\mathcal{N}(\lambda)=m\mathcal{N}\mathfrak{b}\}/\mathcal{O}_K^\times\leftrightarrow\{\mathfrak{a}:\mathfrak{a}\in\mathcal{B}^{-1},\mathcal{N}\mathfrak{a}=m\}$$

A su vez, el mapa $\mathfrak{b}\mapsto\bar{\mathfrak{b}}$ donde $\bar{\mathfrak{b}}$ es el complejo conjugado de $\mathfrak{b}$ realiza la siguiente biyección:

$$\{\mathfrak{b}:\mathfrak{b}\in\mathcal{B},\mathcal{N}\mathfrak{b}=m\}\leftrightarrow\{\mathfrak{a}:\mathfrak{a}\in\mathcal{B}^{-1},\mathcal{N}\mathfrak{a}=m\}$$

□

Definición. Definimos la serie de Einsenstein

$$E(z) = \sum_{\mathcal{B} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)} E_{\mathcal{B}}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} R(m) q^m$$

Es claro que $R(0) = \frac{h(-D)}{2u}$, y de acuerdo a la proposición anterior y si $m \geq 1$, $R(m)$ es la cantidad de ideales de $\mathcal{O}_K$ de norma m.

2. L-series de Rankin

Consideramos K un cuerpo cuadrático imaginario de discriminante $-D$ y mantenemos la notación de la sección anterior. Si $\mathcal{A}$ es una clase de ideales de $\mathcal{O}_K$, y f es una forma cuspidal de nivel N coprimo con D, estudiaremos la L-serie de Rankin $L_{\mathcal{A}}(f,s)$. Estas L-series de Rankin se definirán como el producto de cierta L-serie de Dirichlet con la convolución de la L-serie asociada f, y la L-serie asociada a la serie theta $E_{\mathcal{A}}$ definida en la sección anterior.

Llamaremos $S_2^n(\Gamma_0(N))$ al espacio de formas cuspidales de peso 2 y nivel N generado por las nuevas formas (de ahí el supraíndice n en la notación). Las nuevas formas son formas cuspidales, vectores propios comunes a todos los operadores de Hecke y que no son formas modulares para $\Gamma_0(d)$ con $d < N$ divisor de N.

Definición (L-series de formas modulares)**.** Sea $f \in S_2^n(\Gamma_0(N))$. Si la expansión de Fourier de f es

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$$

definimos su L-serie de Hecke como

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

Definición (L-series de Rankin)**.** Sea Definimos las L-series de Rankin $L_{\mathcal{A}}(f,s)$ como el producto de la L-serie de Dirichlet

$$L^{(N)}(2s-1,\epsilon) = \sum_{\substack{m=1 \\ (m,N)=1}} \frac{\epsilon(m)}{m^{2s-1}}$$

y la convolución de $L(f,s)$ con la serie de Dirichlet $\sum_{m>0} r_{\mathcal{A}}(m) m^{-s}$, obteniendo:

$$L_{\mathcal{A}}(f,s) = \sum_{\substack{m=1 \\ (m,N)=1}} \frac{\epsilon(m)}{m^{2s-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m r_{\mathcal{A}}(m)}{m^s}$$

Teorema. La L-serie $L_{\mathcal{A}}(f,s)$ se extiende analíticamente a todo el plano complejo, y satisface la siguiente ecuación funcional:

$$L^*_{\mathcal{A}}(f,s) := \left(\frac{DN}{4\pi^2}\right)^s \Gamma(s) L_{\mathcal{A}}(f,s) = -\epsilon(N) L^*_{\mathcal{A}}(f, 2-s)$$

3. Valores especiales de L-series de Rankin

Una motivación para estudiar las L-series de Rankin es su relación con L-series de curvas elípticas. Si χ es un carácter en $\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ se define

$$L_K(f, \chi, s) = \sum_{\mathcal{A} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{O})} \chi(\mathcal{A}) L_{\mathcal{A}}(f, s)$$

En particular, cuando $\chi = 1$, se tiene la siguiente descomposición debida a Waldspurger:

$$L(f, \chi, 1) = L(f, 1) L(f \otimes \epsilon, 1)$$

donde $f \otimes \epsilon = \sum_{m \geq 1} a_m \epsilon(m) q^m$ es el *twist* de f por ϵ, tiene peso 2 y nivel ND^2.

Si $L(f, s)$ resulta ser la L-serie asociada a una curva elíptica modular, la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer (en su versión débil) dice que el orden de anulación de $L(f, s)$ en $s = 1$ coincide con el rango de la curva elíptica.

De hecho Gross y Zagier muestran cómo construir un punto racional de orden infinito en la curva elíptica, si $L(f, s)$ tiene un cero simple en $s = 1$.

La ecuación funcional de $L_{\mathcal{A}}$ en $s = 1$ es $L_{\mathcal{A}}^*(f, 1) = \left(\frac{DN}{4\pi^2}\right)^2 L_{\mathcal{A}}(f, 1) = -\epsilon(N) L_{\mathcal{A}}^*(f, 1)$. Cuando $\epsilon(N) = +1$, el valor central $L_{\mathcal{A}}(f, 1)$ se anula trivialmente. En este caso Gross y Zagier estudiaron el valor de la derivada $L'_{\mathcal{A}}(f, 1)$. En el caso $\epsilon(N) = -1$ Gross da una forma de calcular $L_{\mathcal{A}}(f, 1)$ contando inmersiones de cuerpos cuadráticos en álgebras de cuaterniones, relacionada con la correspondencia de Shimura.

Una herramienta fundamental para el cálculo de $L_{\mathcal{A}}(f, 1)$ es el método de Rankin, ya que permite escribir la serie $L_{\mathcal{A}}(f, s)$ como un producto escalar de Petersson. El producto de Petersson obtenido a través del método de Rankin es entre f y una serie de Einsenstein en $\Gamma_0(ND)$. Luego, utilizando el operador traza, se puede expresar $L_{\mathcal{A}}(f, s)$ como un producto de Petersson en $\Gamma_0(N)$.

4. Método de Rankin

La primera parte del método de Rankin consiste en escribir la L-serie $L_{\mathcal{A}}(f, s)$ en forma integral.

Para $Re(s)$ suficientemente grande tenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m r_{\mathcal{A}}(m)}{m^s} &= \left(\int_0^{\infty} e^{-y} y^s \frac{dy}{y} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m r_{\mathcal{A}}(m)}{m^s} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{m}\right)^s a_m r_{\mathcal{A}}(m) \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

El término $\int_0^{\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{m}\right)^s a_m r_{\mathcal{A}}(m) \frac{dy}{y}$ coincide con la tranformada de Mellin de la función de y $e^{-y} \left(\frac{1}{m}\right)^s a_m r_{\mathcal{A}}(m)$. En particular, la transformada de Mellin es integrar la función contra el núcleo y^s con respecto a la medida multiplicativa de Haar $\frac{dy}{y}$, lo que la hace invariante con respecto a la multiplicación escalar. Entonces si consideramos $y \mapsto 4\pi m y$:

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m r_{\mathcal{A}}(m)}{m^s} &= \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-4\pi m y} y^s (4\pi)^s a_m r_{\mathcal{A}}(m)\frac{dy}{y} \\ &= (4\pi)^s \int_0^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Big(a_m r_{\mathcal{A}}(m) e^{-4\pi m y}\Big) y^s \frac{dy}{y}\end{aligned}$$

Si $z = x + iy$, entonces $\overline{E_{\mathcal{A}}(z)} = \sum_{m=1}^{\infty} r_{\mathcal{A}}(m) e^{-2\pi i x} e^{-2\pi y}$, y a su vez $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{2\pi i x} e^{-2\pi i}$ entonces $f(z)\overline{E_{\mathcal{A}}(z)} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m r_{\mathcal{A}}(m) e^{-4\pi m y}$ obteniéndose entonces la siguiente igualdad:

$$(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m r_{\mathcal{A}}(m)}{m^s} = \int_0^{\infty}\left(\int_0^1 f(x+iy)\overline{E_{\mathcal{A}}(x+iy)}dx\right) y^s \frac{dy}{y}$$

Sea $\Gamma_\infty = \left\{ \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$. El dominio fundamental de la acción de Γ_∞ en $\mathbb{H}$ es justamente $\{x + iy : x \in [0,1]; y \in (0, +\infty)\}$ entonces la integral anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\left(\int_0^1 f(x+iy)\overline{E_{\mathcal{A}}(x+iy)}dx\right) y^s \frac{dy}{y} &= \iint_{\Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{E_{\mathcal{A}}(z)} y^{s+1}\frac{dxdy}{y^2} \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(ND)} \iint_{\gamma F_{ND}} f(z)\overline{E_{\mathcal{A}}(z)} y^{s+1}\frac{dxdy}{y^2}\end{aligned}$$

donde F_{ND} es un dominio fundamental para la acción de $\Gamma_0(ND)$ en $\mathbb{H}$.

Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(ND)$ ocurre que:

$$\begin{aligned} f(\gamma z) &= (cz+d)^2 f(z) \\ \overline{E_{\mathcal{A}}(\gamma z)} &= \epsilon(d)(c\bar{z}+d)\overline{E_{\mathcal{A}}(z)} \\ \mathrm{Im}(\gamma z) &= \frac{y}{|cz+d|^2}\end{aligned}$$

Entonces, utilizando que la medida de Haar para la acción de $SL_2(\mathbb{R})$ es precisamente $\frac{dxdy}{y^2}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} & (4\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m r_{\mathcal{A}}(m)}{m^s} \\ = & \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(ND)} \iint_{F_{ND}} f(\gamma z)\overline{E_{\mathcal{A}}(\gamma z)}\mathrm{Im}(\gamma z)^{s+1}\frac{dxdy}{y^2} \\ = & \sum_{\gamma=\pm\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(ND)} \iint_{F_{ND}} f(z)(cz+d)^2\overline{E_{\mathcal{A}}(z)}(c\bar{z}+d)\epsilon(d)\frac{y^{s+1}}{|cz+d|^{2s+2}}\frac{dxdy}{y^2} \\ = & \sum_{\gamma=\pm\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(ND)} \iint_{F_{ND}} f(z)\overline{E_{\mathcal{A}}(z)}\frac{\epsilon(d)}{c\bar{z}+d}\frac{y^{s-1}}{|cz+d|^{2s-2}}dxdy\end{aligned}$$

Definición. Para $M \geq 1$ definimos la serie de Eiseinstein $E_{MD}(s,z)$ de peso 1, nivel MD, y carácter ϵ:

$$E_{MD}(s,z) = \sum_{\substack{m\geq 1 \\ (m,M)=1}} \frac{\epsilon(m)}{m^{2s+1}} \sum_{\gamma=\pm\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(MD)} \frac{\epsilon(d)}{cz+d}\frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
& (4\pi)^{-s}\Gamma(s) \sum_{\substack{m\geq 1\\ (m,M)=1}} \frac{\epsilon(m)}{m^{2s-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m r_{\mathcal{A}}(m)}{m^s} \\
= & \iint_{F_{ND}} f(z)\overline{E_{\mathcal{A}}(z)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon(m)}{m^{2s-1}} \sum_{\gamma=\pm\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(ND)} \frac{\epsilon(d)}{c\bar{z}+d}\frac{y^{s-1}}{|cz+d|^{2s-2}}dxdy
\end{aligned}
$$

Entonces probamos:

$$
\begin{aligned}
(4\pi)^{-s}\Gamma(s)L_{\mathcal{A}}(f,s) &= \iint_{F_{ND}} f(z)\overline{E_{\mathcal{A}}(z)E_{ND}(\bar{s}-1,z)}dxdy \\
&= (f, E_{\mathcal{A}}(z)E_{ND}(\bar{s}-1,z))_{\Gamma_0(ND)}
\end{aligned}
$$

De esta forma, el método de Rankin logra expresar $L_{\mathcal{A}}(f,s)$ en función de un producto de Petersson en $\Gamma_0(ND)$.

El próximo paso consiste en expresarlo como un producto de Petersson en $\Gamma_0(N)$, para ello se utiliza el operador traza que se define a continuación.

Definición. Si g es una forma modular de peso 2 y nivel ND, definimos

$$
\mathrm{Tr}_N^{ND}\{g\} = \sum_{\gamma\in\Gamma_0(ND)\backslash\Gamma_0(N)} g|_2\gamma
$$

donde para $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$, $(g|_2\gamma)(z) = (\det\,\gamma)(cz+d)^{-2}g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$.

Proposición. *$Tr_N^{ND}\{g\}$ es una forma modular de peso 2 y nivel N.*

Proposición. $(f,g)_{\Gamma_0(ND)} = (f, Tr_N^{ND}\{g\})_{\Gamma_0(N)}$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
(f,g)_{\Gamma_0(ND)} &= \iint_{F_{ND}} f(z)\overline{g(z)}y^2\frac{dxdy}{y^2} \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma_0(ND)\backslash\Gamma_0(N)} \iint_{F_{\gamma N}} f(z)\overline{g(z)}y^2\frac{dxdy}{y^2} \\
&= \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_0(ND)\backslash\Gamma_0(N)\\ \gamma=\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d\end{smallmatrix}\right)}} \iint_{F_N} f(\gamma z)\overline{g(\gamma z)}\frac{y^2}{|cz+d|^4}\frac{dxdy}{y^2} \\
&= \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_0(ND)\backslash\Gamma_0(N)\\ \gamma=\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d\end{smallmatrix}\right)}} \iint_{F_N} f(\gamma z)(cz+d)^{-2}\overline{g(\gamma z)(cz+d)^{-2}}dxdy \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma_0(ND)\backslash\Gamma_0(N)} \iint_{F_N} f(z)\overline{(g|_2\gamma)(z)}dxdy \\
&= \iint_{F_N} f(z)\overline{(\mathrm{Tr}_N^{ND}\{g\})(z)}dxdy \\
&= (f, \mathrm{Tr}_N^{ND}\{g\})_{\Gamma_0(N)}
\end{aligned}
$$

□

El desarrollo anterior demuestra el siguiente teorema.

Teorema.

$$(4\pi)^{-s}\Gamma(s)L_{\mathcal{A}}(f,s) = (f, \mathrm{Tr}_N^{ND}\{E_{\mathcal{A}}(z)E_{ND}(\bar{s}-1,z)\})_{\Gamma_0(N)}$$